Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

Examen de Análisis Matemático I – febrero 2014

Soluciones

Ejercicio 1. Sea (E, d) un espacio métrico. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (E, d) es completo.

b) Para toda sucesión $\{F_n\}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de E tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\mathrm{diam}(F_n)\} \to 0$, se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Solución. a) $\Longrightarrow$ b). Sea $\{F_n\}$ en las condiciones de b). Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $F_n \neq \emptyset$, sea $x_n \in F_n$. Si $p > q \geqslant n$ se tiene que $x_p, x_q \in F_p \subseteq F_n$ por lo que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \mathrm{diam}(F_n)$. Como $\{\mathrm{diam}(F_n)\} \to 0$, se sigue que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Por la hipótesis hecha, se tiene que $\{x_n\} \to x$ en (E, d). Fijado $q \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left\{x_{q+n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ porque es una parcial de $\{x_n\}$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_{q+n} \in F_{q+n} \subseteq F_q$ y, como F_q es cerrado, debe ser $x \in F_q$. Luego $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

b) $\Longrightarrow$ a). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (E, d). Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ y $F_n = \overline{A_n}$. Como la sucesión es de Cauchy, se tiene que $\mathrm{diam}(F_n) = \mathrm{diam}(A_n) \to 0$. Por la hipótesis hecha se tiene que hay algún $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Tenemos que $\mathrm{d}(x_n, x) \leqslant \mathrm{diam}(F_n) \to 0$, luego $\{x_n\} \to x$. ☺

Ejercicio 2. Estudia si el campo escalar definido por:

$$f(x, y) = xy\frac{\mathrm{sen}(x^2) - \mathrm{sen}(y^2)}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12} f(0,0)$ y $D_{21} f(0,0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Solución. En virtud de la regla de la cadena, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tenemos que:

$$D_1 f(x, y) = \frac{\big(y\big(\mathrm{sen}(x^2) - \mathrm{sen}(y^2)\big) + 2x^2 y\cos(x^2)\big)(x^2 + y^2) - 2x^2 y\big(\mathrm{sen}(x^2) - \mathrm{sen}(y^2)\big)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Como $f(x,0) = f(0,y) = 0$ se sigue que $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$. Como el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es abierto, teniendo en cuenta el teorema de localización de la continuidad, se sigue que la aplicación $D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |D_1 f(x, y)| &\leqslant \frac{\big(|y|\big(\left|\mathrm{sen}(x^2)\right| + \left|\mathrm{sen}(y^2)\right|\big) + |x|\,2\,|xy|\big)(x^2 + y^2) + |x|\,2\,|xy|\big(\left|\mathrm{sen}(x^2)\right| + \left|\mathrm{sen}(y^2)\right|\big)}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\big(|y|\,(x^2 + y^2) + |x|\,(x^2 + y^2)\big)(x^2 + y^2) + |x|\,(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2\,|x| + |y| \leqslant 2\|(x, y)\|_1 \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado las conocidas desigualdades $2\,|xy| \leqslant x^2 + y^2$ y $|\mathrm{sen}(t)| \leqslant |t|$. Deducimos de la desigualdad anterior que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x, y) = 0$. Hemos probado así que $D_1 f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Como $f(x,y) = -f(y,x)$ se verifica que $D_2 f(x,y) = -D_1 f(y,x)$, por lo que también $D_2 f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Por tanto f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.

Es claro que tanto $D_1 f$ como $D_2 f$ tienen derivadas parciales continuas de todos órdenes en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Estudiemos la continuidad de $D_{12} f$ en $(0,0)$. Tenemos que:

$$D_2(D_1 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_1 f(0,t) - D_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} = -1$$

$$D_1(D_2 f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_2 f(t,0) - D_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-D_1 f(0,t)}{t} = 1$$

Como estas derivadas parciales no coinciden se sigue, por el teorema de Schwarz, que $D_{12} f$ (que coincide con $D_{21} f$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) no puede ser continua en $(0,0)$. Luego f no es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$. ☺

Ejercicio 3. Clasifica los puntos críticos del campo escalar

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 y + y + 1$$

y calcula sus extremos absolutos en la bola euclídea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

Solución. Los puntos críticos son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 + 2xy = x(3x+2y) = 0 \tag{1}$$
$$D_2 f(x,y) = -3y^2 + x^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

La ecuación (1) implica que $x=0$ o $3x+2y=0$. Si $x=0$ deducimos por (2) que $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Obtenemos así los puntos $\pm\big(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\big)$.

Si $x \neq 0$ debe ser $3x+2y=0$, esto es, $y=-3x/2$. Sustituyendo en (2) obtenemos $-23x^2+4=0$, de donde $x = \pm\frac{2}{\sqrt{23}}$. Obtenemos así los puntos $\pm\big(\frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}\big)$.

Hemos obtenido cuatro puntos críticos. Todos ellos están en el interior de B: Para clasificarlos calcularemos la matriz hesiana. Tenemos que

$$H(x,y) = 2\begin{pmatrix} 3x+y & x \\ x & -3y \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$H\big(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\big) = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad H\big(\frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}\big) = \frac{2}{\sqrt{23}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Deducimos que $\big(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ es un punto de silla, y como $H\big(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}\big) = -H\big(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\big)$, se sigue que $\big(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}\big)$ es otro punto de silla. En $\big(\frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}\big)$ hay un mínimo relativo estricto, y como $H\big(\frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}\big) = -H\big(\frac{-2}{\sqrt{23}}, \frac{3}{\sqrt{23}}\big)$ se sigue que en $\big(\frac{-2}{\sqrt{23}}, \frac{3}{\sqrt{23}}\big)$ hay un máximo relativo estricto.

Puesto que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ es un compacto, la existencia de extremos absolutos de f en B es consecuencia del teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos para funciones continuas en un compacto. Dichos extremos o bien se alcanzan en el interior de B, en cuyo caso deben ser los puntos críticos $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}\right)$, o bien se alcanzan en la frontera de B que es la variedad dada por $x^2+y^2-2=0$, en cuyo caso deben ser puntos críticos de la función de Lagrange

$$F(x,y,\lambda)=x^3-y^3+x^2y+y+1+\lambda(x^2+y^2-2)$$

Calculemos los puntos críticos de la función de Lagrange.

$$\begin{aligned} D_1F(x,y,\lambda) &= 3x^2+2xy+2\lambda x = x(3x+2y+2\lambda)=0 && (3)\\ D_2F(x,y,,\lambda) &= -3y^2+x^2+1+2\lambda y=0 && (4)\\ D_3F(x,y,,\lambda) &= x^2+y^2-2=0 && (5)\end{aligned}$$

La ecuación (3) implica que $x=0$ o $3x+2y+2\lambda=0$. Si $x=0$ la ecuación (5) nos da $y=\pm\sqrt{2}$ (podemos calcular por (4) el correspondiente valor de λ pero eso no interesa). Obtenemos así los puntos $\pm(0,\sqrt{2})$. Si $x\neq 0$ debe ser $3x+2y+2\lambda=0$, esto es, $\lambda=-\frac{1}{2}\big(3x+2y\big)$. La ecuación (4) implica que $y\neq 0$. Despejando λ en dicha ecuación obtenemos $\lambda=\frac{1}{2y}\big(3y^2-x^2-1\big)$. Igualando los valores obtenidos para λ resulta:

$$-(3x+2y)y=3y^2-x^2-1 \Longrightarrow 5y^2-x^2-1=-3xy \overset{(5)}{\Longrightarrow} 5y^2+y^2-3=-3xy \Longrightarrow x=\frac{-1}{y}(2y^2-1)$$

Sustituyendo este valor de x en (5) resulta:

$$\frac{1}{y^2}(2y^2-1)^2+y^2-2=0 \Longrightarrow 5y^4-6y^2+1=0 \Longrightarrow \begin{cases} y^2=1 \Longrightarrow y=\pm 1\\ y^2=\dfrac{1}{5} \Longrightarrow y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para y en $x=\dfrac{-1}{y}(2y^2-1)$ resultan los puntos $\pm(1,-1)$ y $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Para cada uno de ellos puede calcularse el valor correspondiente de λ pero eso no interesa. Ya solamente queda evaluar f en estos cuatro puntos y en los dos puntos críticos $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}\right)$. Haciéndolo (mejor con un programa de cálculo simbólico) se comprueba que el máximo absoluto se alcanza en $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y es igual a $1+8/\sqrt{5}$ y el mínimo absoluto se alcanza en $-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y es igual a $1-8/\sqrt{5}$. ☺

Ejercicio 4. Justifica que existen dos campos escalares u y v de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidos en un entorno abierto U del punto $(1,0)$ verificando que $u(1,0)=0$, $v(1,0)=1$ y para todo $(x,y)\in U$:

$$\begin{aligned} x^2u(x,y)+2yv(x,y)+xy &= 0 && (6)\\ yu(x,y)^2+3u(x,y)v(x,y)+v(x,y)x^2-1 &= 0 && (7)\end{aligned}$$

Sea $(s,t)\mapsto f(s,t)$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ definido en un entorno abierto de $(0,1)$ y definamos $h(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$. Calcula $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(1,0)$ sabiendo que $D_1f(0,1)=D_2f(0,1)=D_{12}f(0,1)=D_{22}f(0,1)=1$.

Solución. Pongamos $\mathbf{F}(x,y,u,v)=(x^2u+2yv+xy, yu^2+3uv+vx^2-1)$. $\mathbf{F}$ es una función vectorial de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^4$. Tenemos que $\mathbf{F}(1,0,0,1)=(0,0)$. La matriz formada por las dos últimas columnas de la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ es

$$\begin{pmatrix} x^2 & 2y\\ 2uy+3v & 3u+x^2\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en esta matriz $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es distinto de cero. En estas condiciones el teorema de la función implícita asegura la existencia de entornos abiertos U del punto $(1, 0)$ y V del punto $(0, 1)$ y una función $\boldsymbol{\varphi} = (u, v) : U \to V$, $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ verificándose que:

$$(U \times V) \cap \left\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{F}(x, y, u, v) = (0, 0)\right\} = \{(x, y, u(x, y), v(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

Es decir para todo $(x, y) \in U$ se verifican las igualdades (6) y (7).

Derivando, por la regla de la cadena, la función compuesta $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)$ obtenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

donde las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ se evalúan en un punto $(x, y) \in U$ y las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ se evalúan en $(u(x, y), v(x, y))$. Volviendo a derivar la igualdad anterior respecto a la variable segunda resulta:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Donde las derivadas parciales de las funciones u y v se evalúan en un punto $(x, y) \in U$ y las derivadas parciales de f se evalúan en $(u(x, y), v(x, y))$. Haciendo en la última igualdad $(x, y) = (1, 0)$ en cuyo caso $u(1, 0) = 0$, $v(1, 0) = 1$ obtenemos, usando notación de subíndices para las derivadas parciales de h y de f:

$$\begin{aligned} D_{12}h(1, 0) = {} & \left(D_{11}f(0, 1)\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + D_{12}f(0, 1)\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0)\right)\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + D_1 f(0, 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1, 0) + \\ & + \left(D_{12}f(0, 1)\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + D_{22}f(0, 1)\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0)\right)\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) + D_2 f(0, 1)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(1, 0) \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular las derivadas parciales de u y v que necesitamos para evaluar esta expresión. Derivando las igualdades (6) y (7) respecto a x se tiene:

$$\begin{aligned} 2xu + x^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial v}{\partial x} + y &= 0 \\ 2y\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial x}v + 3u\frac{\partial v}{\partial x} + 2xv + x^2\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Derivando respecto a y obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial u}{\partial y} + 2v + 2y\frac{\partial v}{\partial y} + x &= 0 \\ u^2 + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial y}v + 3u\frac{\partial v}{\partial y} + x^2\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ se obtiene fácilmente:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = -3, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 9$$

Derivando las dos últimas ecuaciones respecto a x tenemos:

$$\begin{aligned} 2x\frac{\partial u}{\partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial x} + 2y\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + 1 &= 0 \\ 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}v + 3\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + 3u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + 2x\frac{\partial v}{\partial y} + x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ se obtiene fácilmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(1,0) = 9, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}(1,0) = -63$$

Con estos datos resulta:

$$D_{12}h(1,0) = 9D_1 f(0,1) + \big(-3D_{12} f(0,1) + 9D_{22} f(0,1)\big)(-2) - 63D_2 f(0,1) = -66.$$

☺